МИНИСТЕРСТВО ЭНЕРГЕТИКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ «БЕЛЭНЕРГО»
УО «МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор УО «МГЭК»
_______ А.А. Новиков
«20» ______ 2024 г.

МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Методические указания по выполнению домашней контрольной работы для учащихся заочной формы получения образования

5-04-0712-04 «Техническая эксплуатация оборудования электрических станций»
5-04-0712-05 «Техническая эксплуатация оборудования тепловых электрических станций»
(шифр и название специальностей)

Разработал преподаватель _______ С.А. Порохненко
(подпись) (ФИО)

Рассмотрено и одобрено на заседании предметной (цикловой) комиссии
естественно-математических предметов
(наименование цикловой комиссии)

Протокол № 5 от 18 января 2024 г.

Председатель цикловой комиссии _______ С.А.Порохненко
(подпись) (ФИО)

Согласовано
Методист колледжа _______ О.В. Какорина
(подпись) (ФИО)

Заведующий заочным отделением _______ А.А. Куцов
(подпись) (ФИО)

2024

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ

Методические рекомендации предназначены для выполнения домашней контрольной работы и подготовки к устному экзамену учащимися заочного отделения по предмету «Математика в профессиональной деятельности».

В работе перечислены основные вопросы разделов, которые необходимо изучить учащемуся. Разработаны вопросы для самоконтроля, приведен необходимый теоретический и практический материал для самостоятельной подготовки учащихся к экзамену.

В рекомендации указаны параграфы источников математической литературы, упражнения, которые необходимо рассмотреть и решить для усвоения темы или раздела, что облегчит самостоятельную работу учащихся.

В работе представлено 100 вариантов домашней контрольной работы из 6 заданий каждый. Приведен образец оформления домашней контрольной работы с решениями. В приложениях приведены основные формулы дифференцирования и интегрирования, необходимые для выполнения практических заданий и подготовки к экзамену.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Современное состояние развития общества характеризуется математизацией и информатизацией всего научного знания. В условиях наукоемкости производства востребован творческий уровень образования специалистов. Обладая огромным эвристическим потенциалом, математика облегчает стратегические оценки широкого спектра задач, обеспечивает экономическое развитие общества. Важность математического образования обусловлена еще и тем, что математика – неотъемлемая и существенная часть общечеловеческой культуры. Поэтому следует подчеркнуть большую роль математического образования при формировании общей культуры человека.

Математическое образование значимо не только для общественного прогресса, оно не менее актуально для непрерывного образования и личностного развития каждого человека. Уже по самой своей сути математика как предмет (в процессе ее изучения) способствует формированию абстрактного, логического, алгоритмического мышления учащихся. В условиях профессионального образования математические знания учащихся предстают как средство развития личности, как способ освоения определенной деятельности, в частности – профессиональной.

В соответствии с теми возможностями, которые предоставляет математика, определяются цели и задачи математического образования учащихся учреждений среднего специального образования.

Цель математического образования в учреждениях среднего специального образования выражается в единстве трех ее составляющих:

1) удовлетворение личностных потребностей учащихся в соответствующем уровне математического образования;

2) обеспечение качества математического образования учащихся в соответствии с интересами общества и государства;

3) формирование математической компетентности учащихся для последующего осуществления профессиональной деятельности и продолжения образования.

Исходя из этого, основными задачами математического образования учащихся учреждений ССО являются:

- формирование математической компетентности учащихся в контексте будущей профессиональной деятельности и для продолжения образования;
- обучение учащихся навыкам использования основных математических методов с целью их последующего применения в профессиональной деятельности для анализа и исследования реальных процессов и явлений;

- формирование представлений о методологическом значении и роли математики в научно-техническом (общественном) прогрессе, о культурологической сущности математики.

С целью закрепления теоретических знаний и практический умений и навыков программой предусмотрено проведение практических занятий.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Раздел, тема	Количество учебных часов				
	Всего		В том числе		
	для дневной формы	для заочной формы	на установочные и обзорные занятия	на лабораторные, практические занятия	Время на самостоятельную работу учащихся (часов)
Раздел 1. Комплексные числа	8	4	4	-	4
Раздел 2. Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений	12	4	2	2	8
Раздел 3. Векторы в пространстве. Аналитическая геометрия	8	-	-	-	8
Раздел 4. Предел функции и непрерывность	10	4	2	2	6
Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных	12	4	2	2	8
Раздел 6. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл	18	4	2	2	14
Раздел 7. Дифференциальные уравнения	8	-	-	-	8
Раздел 8. Ряды	12	-	-	-	12
Раздел 9. Комбинаторика, теория графов, теория вероятностей	12	-	-	-	12
ИТОГО	**100**	**20**	**12**	**8**	**80**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛОВ, ТЕМ ПРОГРАММЫ

РАЗДЕЛ 1. Комплексные числа

1.1. Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.
1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
1.3. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.

В результате изучения раздела «**Комплексные числа»** учащийся **должен:**
знать понятия модуля комплексного числа, аргумента комплексного числа.
уметь записывать комплексное число в алгебраической, тригонометрической, показательной формах и переходить от одной формы записи к другой.
уметь выполнять действия над комплексными числами (умножение, деление, возведение в натуральную степень) в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Вопросы для самоконтроля:
1. Как записываются комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах?
2. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме?
3. Сформулируйте правила умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.
4. Как определяется комплексная степень числа *e*?
5. Как записываются комплексные числа в показательной форме?
6. В чем заключаются правила умножения, деления, возведения в степень для чисел, записанных в показательной форме?

Примеры

Пример 1. Найти модуль чисел: 1) $z = i$; 2) $z = -5i$; 3) $z = 1 + i$.

Решение: 1) Здесь $a = 0,\ b = 1$. По формуле $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ получим $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$.

2) Здесь $a = 0,\ b = -5$; находим $r = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$.

3) Здесь $a = 1,\ b = 1$; находим $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Выполнить действия: 1) $(4+2i) + (1+5i)$; 2) $(2-3i)(2+3i)$; 3) $\dfrac{2-3i}{4+5i}$.

Решение: 1) По правилу сложения комплексных чисел получим
$(4+2i) + (1+5i) = (4+1) + (2+5)i = 5+7i$;
2) По правилу умножения комплексных чисел получим
$(2-3i)(2+3i) = 4 - 9i = 4+9 = 13$;
3) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i.$$

Пример 3. Представить в тригонометрической форме комплексное число:
1) $z = 4 - 4\sqrt{3}i$; 2) $z = -3i$; 3) $z = 1 - \sqrt{3}$.

Решение. 1) Находим модуль данного числа $|z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8.$

$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$ и число z лежит в IV четверти. Поэтому $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ (рис.1).

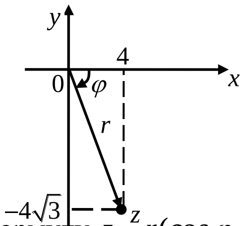

Рис. 1

Подставим полученные значения $|z|$ и φ в формулу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получим:

$$z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

2) В данном случае $|z| = 3$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ (точка, изображающая данное число, принадлежит отрицательной части мнимой оси (рис. 2)).

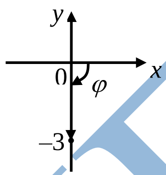

Рис. 2

Поэтому $z = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right).$

3) Находим модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \left|1 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1$

(так как $1 - \sqrt{3} < 0$), $\varphi = \pi$ (заданное число является отрицательным действительным числом (рис. 3)).

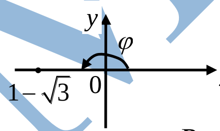

Рис. 3

Поэтому $z = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$.

Пример 4. Представить число в показательной форме:
1) $-1 + i$; 2) $-6i$.

Решение. 1) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$ и число лежит во II четверти, следовательно $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Получили $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

2) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = -6i$: $|z| = 6$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда, по формуле $z = re^{i\varphi}$. имеем: $z = -6i = 6e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Литература: [5] гл. 3 (§12, 13, 14); ***решение упражнений*** № 3.15, 3.17, 3.19;
[9] гл. 1 (§1, 2, 3); ***решение упражнений*** № 1.27, 1.28, 1.29, 1.32;
[10] гл. 13 (§1, 2, 3); ***решение упражнений*** № 10, 13, 14, 25, 26, 27, 36, 37, 38, 40, 41, 42.

РАЗДЕЛ 2. Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Понятие матрицы с числовыми элементами. Виды матриц. Линейные операции над матрицами. Транспонирование и умножение матриц.

2.2. Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства, способы вычисления.
2.3. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений методами Крамера и Гаусса.

РАЗДЕЛ 3. Векторы в пространстве. Аналитическая геометрия

3.1. Понятие вектора на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами в геометрической форме.
3.2. Прямоугольная декартова система координат, координаты вектора. Длина вектора, линейные операции над векторами в координатной форме.
3.3. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения в координатной форме.

В результате изучения разделов 2, 3 «. **Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений. Векторы в пространстве. Аналитическая геометрия»** учащийся **должен:**
знать понятие матрицы с числовыми элементами, виды матриц (прямоугольная, квадратная, диагональная, единичная, нулевая).
уметь выполнять линейные операции над матрицами (умножение матрицы на число, сложение матриц), транспонировать матрицу, умножать матрицы.
знать понятия определителя 2-го и 3-го порядков, свойства определителей, способы вычисления определителей.
знать понятие системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными, методы Крамера и Гаусса решения этих систем.
уметь решать задачи с профессионально направленным содержанием, используя методы линейной алгебры.
знать понятия вектора в пространстве, длины вектора, линейных операций над векторами.
уметь решать задачи, используя свойства линейных операций над векторами, свойства скалярного произведения векторов.
знать канонические уравнения кривых второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы).

Вопросы для самоконтроля:
1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются равными, квадратными?
3. Какая матрица называется матрицей-строкой, матрицей-столбцом, единичной матрицей, диагональной матрицей?
4. Что такое минор и алгебраическое дополнение?
5. Приведите алгоритм вычисления обратной матрицы.
6. Что называется матрицей второго и третьего порядков? Запишите формулы вычисления их определителей.
7. Перечислите свойства определителей.
8. Что называется решением системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными?
9. Запишите формулы Крамера с помощью определителей.
10. В чем заключается метод Гаусса?

<u>Примеры</u>

Пример 1. Найти $2A-3B$, если
$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение. Прежде всего следует заметить, что матрицы A и B имеют одинаковый размер 2×3. Поэтому по определению линейных операций над матрицами имеем:

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}1&2&4\\-1&0&3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3&-8&4\\1&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1&2\cdot2&2\cdot4\\2\cdot(-1)&2\cdot0&2\cdot3\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}3\cdot3&3\cdot(-8)&3\cdot4\\3\cdot1&3\cdot(-2)&3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&8\\-2&0&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&-24&12\\3&-6&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2-9&4+24&8-12\\-2-3&0+6&6-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&28&-4\\-5&6&6\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&4&1\\3&2&5\end{vmatrix}$ различными способами.

Решение. *1-й способ.* Используем правило треугольников:

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&4&1\\3&2&5\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot5+0\cdot1\cdot3+(-1)\cdot2\cdot2-\left((-1)\cdot4\cdot3+0\cdot2\cdot5+1\cdot1\cdot2\right)=$$

$$=20-4-(-12+2)=26.$$

2-й способ. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&4&1\\3&2&5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&1\\2&5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4\\3&2\end{vmatrix}=$$

$$=(20-2)+0-(4-12)=26.$$

Пример 3. Решить разными способами систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+5x_2=-2,\\2x_1-x_2+x_3=4,\\3x_1+2x_2+x_3=2.\end{cases}$$

Решение. *1-й способ*. Используем метод обратной матрицы. Запишем матрицу системы:

$$A=\begin{bmatrix}1&5&0\\2&-1&1\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

Матрица A невырожденная, так как ее определитель не равен нулю. Действительно,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&5&0\\2&-1&1\\3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&0\\2&-1&1\\1&3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}=2\neq0.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$A_{11}=-3$; $A_{21}=-5$; $A_{31}=5$;
$A_{12}=1$; $A_{22}=1$; $A_{32}=-1$;
$A_{13}=7$; $A_{23}=13$; $A_{33}=-11$.

Следовательно,

$$\grave{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3&-5&5\\1&1&-1\\7&13&-11\end{bmatrix}.$$

Используем далее формулу $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1,2,\ldots,n$:

$$X=\grave{A}^{-1}\hat{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3&-5&5\\1&1&-1\\7&13&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4\\0\\16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\8\end{bmatrix},$$

т. е. $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=8$ – единственное решение.

Получаем ответ: (–2; 0; 8).

2-й способ. Используя формулы Крамера, вычисляем определитель системы.

Заменяем в определителе Δ первый столбец столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

Заменяем в определителе Δ второй столбец столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяем в определителе Δ третий столбец столбцом свободных членов. Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(28-36) = 16.$$

Тогда, используя формулы $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{2} = 8.$$

Таким образом получаем решение (–2; 0; 8).

3-й способ. Используем метод Гаусса. Приведем заданную систему к равносильной. Для этого осуществим элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 8. \end{cases}$$

Из нее последовательно находим неизвестные, начиная с x_3:

$x_3 = 8$, $x_2 = 0$, $x_1 = -2 - 5 \cdot 0 = -2$,

Таким образом, приходим к ответу (–2; 0; 8).

Литература: [7] гл. 1 (2.1); ***решение упражнений*** № 5.1-5.5, 5.8, 5.9, 5.14, 5.33, 6.24, 2.1, 2.4;
[8] гл. 3 (§ 10, 11, 12); ***решение упражнений*** № 3.7, 3.19, 3.26.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение вектора на плоскости.
2. Что называется длиной (модулем) вектора?
3. Что называется суммой, разностью двух векторов? Объясните правила треугольника и параллелограмма.
4. Что называется произведением вектора на число?
5. Запишите формулу разложения вектора по координатным осям.
6. Дайте определение коллинеарных и неколлинеарных векторов.
7. Что называется скалярным произведением векторов? Запишите формулу скалярного произведения векторов в координатной форме.
8. Каковы основные виды уравнений прямой на плоскости? Какова формула угла между прямыми?
9. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Определения, уравнения.

Примеры

Пример 1. По заданным трем векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис. 1) изобразить их линейную комбинацию $\bar{d} = 3\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c}$.

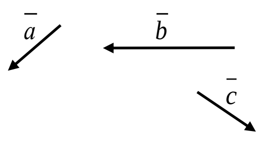

Рис. 1

Решение. Зафиксируем на плоскости произвольную точку O и отложим от нее вектор $3\bar{a}$ (рис. 2). Затем от конца вектора $3\bar{a}$ отложим вектор $-\frac{1}{2}\bar{b}$ и, наконец, вектор $\bar{c}$, исходящий из концевой точки вектора $-\frac{1}{2}\bar{b}$. Искомая линейная комбинация $\bar{d}$ изображается вектором, замыкающим полученную ломаную с началом в точке O.

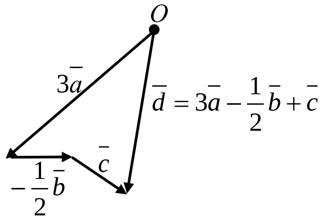

Рис. 2

Пример 2. Найти угол, образованный единичными векторами $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если $\bar{a} \perp \bar{b}$, причем $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 5\bar{m} - 4\bar{n}$.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя его алгебраические свойства:

$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{m} + 2\bar{n},\ 5\bar{m} - 4\bar{n}) =$

$= (\bar{m}, 5\bar{m}) - (\bar{m}, 4\bar{n}) + (2\bar{n}, 5\bar{m}) + (2\bar{n}, -4\bar{n}) =$

$= 5(\bar{m}, \bar{m}) - 4(\bar{m}, \bar{n}) + 10(\bar{n}, \bar{m}) - 8(\bar{n}, \bar{n}) = 5|\bar{m}|^2 + 6(\bar{m}, \bar{n}) - 8|\bar{n}|^2.$

Из условия $\bar{a} \perp \bar{b}$ следует $(\bar{a},\ \bar{b}) = 0$, т. е. $5|\bar{m}|^2 + 6(\bar{m},\ \bar{n}) - 8|\bar{n}|^2 = 0.$

Учитывая, что $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, имеем:

$5 \cdot 1^2 + 6(\bar{m}, \bar{n}) - 8 \cdot 1^2 = 0,$ ïî ãäà $(\bar{m}, \bar{n}) = 1/2.$

Следовательно,

$\cos(\bar{m}, \bar{n}) = \frac{(\bar{m}, \bar{n})}{|\bar{m}| \cdot |\bar{n}|} = \frac{1/2}{1 \cdot 1} = 1/2.$ Из последнего соотношения получаем: $(\bar{m}, \hat{\ } \bar{n}) = \pi/3.$

Пример 3. Даны векторы $\bar{a} = (1,\ 1)$, $\bar{b} = (1,\ -1)$. Найти косинус угла между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$, для которых $2\bar{x} + \bar{y} = \bar{a}$, $\bar{x} + 2\bar{y} = \bar{b}$.

Решение. Выразим $\bar{y}$ из первого заданного соотношения: $\bar{y} = \bar{a} - 2\bar{x}$. Тогда, подставив во второе соотношение, получим $\bar{x} + 2\left(\bar{a} - 2\bar{x}\right) = \bar{b}$, откуда

$$\bar{x} = -\frac{1}{3}\left(\bar{b} - 2\bar{a}\right) = -\frac{1}{3}(1 - 2\cdot 1,\ -1 - 2\cdot 1) = -\frac{1}{3}(-1, -3) = \left(\frac{1}{3}, 1\right),$$

$$\bar{y} = \bar{a} - 2\bar{x} = \left(1 - 2\cdot\frac{1}{3}, 1 - 2\cdot 1\right) = \left(\frac{1}{3}, -1\right).$$

Следовательно, на основании формулы $\cos\left(\bar{a}, \hat{\ } \bar{b}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. получаем:

$$\cos(\bar{x}, \hat{\ } \bar{y}) = \frac{\left(\bar{x}, \bar{y}\right)}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{-8}{9}}{\frac{10}{9}} = -\frac{4}{5}.$$

Пример 4. Привести уравнение эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$ к каноническому виду и определить его параметры. Изобразить эллипс.

Решение. Разделим уравнение $x^2 + 4y^2 = 16$ на 16, после чего получим:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

По виду полученного уравнения заключаем, что это каноническое уравнение эллипса, где $a = 4$ – большая полуось, $b = 2$ – малая полуось. Значит, вершинами эллипса являются точки $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$. Так как $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ – половина междуфокусного расстояния, то точки $F_1(-2\sqrt{3},\ 0)$, $F_2(2\sqrt{3},\ 0)$ являются фокусами эллипса. Вычислим эксцентриситет:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Директрисы D_1, D_2 описываются уравнениями:

$$D_1:\ x=-\frac{8}{\sqrt{3}},\quad D_2:\ x=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Изображаем эллипс (рис. 3).

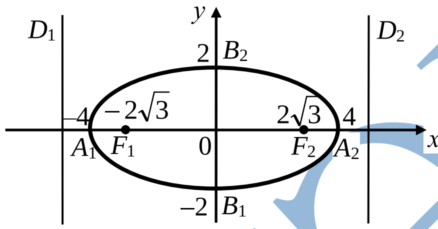

Рис. 3

Пример 5. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $M(1, -2)$ и точки пересечения прямой $x - 7y + 10 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения прямой $x - 7y + 10 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x-7y+10=0,\\ x^2+y^2-2x+4y-20=0. \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения системы: $x = 7y - 10$.

Затем подставим во второе: $(7y - 10)^2 + y^2 - 2(7y - 10) + 4y - 20 = 0$.

Оно равносильно уравнению $y^2 - 3y + 2 = 0$.

Используя формулы корней квадратного уравнения, найдем $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Итак, имеем три точки, лежащие на окружности: $M(1, -2)$, $M_1(4, 2)$ и $M_2(-3, 1)$. Пусть $O_1(x_0, y_0)$ – центр окружности. Тогда $\left|\overline{O_1M}\right|=\left|\overline{O_1M_1}\right|=\left|\overline{O_1M_2}\right|=R,$ где R – радиус окружности.

Найдем координаты векторов:

$$\overline{O_1M}=(1-x_0,\ -2-y_0),$$

$$\overline{O_1M_1}=(4-x_0,\ 2-y_0),$$

$$\overline{O_1M_2}=(-3-x_0, 1-y_0).$$

Значит, $\sqrt{(1-x_0)^2+(-2-y_0)^2}=\sqrt{(4-x_0)^2+(2-y_0)^2}=\sqrt{(-3-x_0)^2+(1-y_0)^2}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} (1-x_0)^2+(-2-y_0)^2=(4-x_0)^2+(2-y_0)^2,\\ (4-x_0)^2+(2-y_0)^2=(-3-x_0)^2+(1-y_0)^2. \end{cases}$$

Упрощаем ее:

$$\begin{cases} -2x_0+5+4y_0=20-8x_0-4y_0,\\ 20-8x_0-4y_0=10+6x_0-2y_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_0+8y_0=15,\\ 7x_0+y_0=5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем ответ:

$$\begin{cases} x_0=0,5,\\ y_0=1,5. \end{cases}$$

Таким образом, центр окружности находится в точке (0,5; 1,5), ее радиус

$R = \sqrt{(1-0,5)^2 + (-2-1,5)^2} = \sqrt{(4-0,5)^2 + (2-1,5)^2} =$

$= \sqrt{(-3-0,5)^2 + (1-1,5)^2} = \sqrt{12,5}.$

Тогда каноническое уравнение искомой окружности имеет вид:

$(x-0,5)^2 + (y-1,5)^2 = 12,5.$

Литература: [10] гл. 17: ***решение упражнений*** № 10, 11, 33, 42, 43, 47;
гл. 18: ***решение упражнений*** № 61, 62, 63;
гл. 19: ***решение упражнений*** № 22, 32, 33, 68, 97, 98;
гл. 20: ***решение упражнений*** № 31, 32, 33, 40, 42, 43, 46, 47.

РАЗДЕЛ 4. Предел функции и непрерывность

4.1. Понятие функции.
4.2. Числовая последовательность. Способы ее задания. Виды последовательностей.
4.3. Понятие предела последовательности, его свойства. Вычисление предела последовательности. Раскрытие неопределенностей. Число *e*.
4.4. Понятие предела функции в точке. Свойства предела. Предел функции на бесконечности.
4.5. Неопределенности. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов.
4.6. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на отрезке. Свойства непрерывных функций.

В результате изучения раздела «**Функции. Предел функции. Непрерывность функции»** учащийся **должен:**

знать понятия предела функции в точке, предела функции на бесконечности, свойства предела функции.
знать основные виды неопределенностей и способы их раскрытия, первый и второй замечательные пределы.
уметь вычислять пределы функции.
знать понятия непрерывной функции в точке, на отрезке, основные свойства непрерывных функций.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется пределом последовательности?
2. Какая последовательность называется бесконечно малой?
3. Какая последовательность называется бесконечно большой?
4. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух последовательностей.
5. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух последовательностей.
6. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух последовательностей.
7. Сформулируйте теорему о пределе отношения двух последовательностей.
8. Что называется пределом функции?
9. Сформулируйте теорему о пределе суммы (разности) двух функций.
10. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций.
11. Сформулируйте теорему о пределе отношения двух функций.
12. Какая функция называется непрерывной?
13. Какая точка называется точкой непрерывности функции?
14. Какая точка называется точкой разрыва функции?

<u>Примеры</u>

Пример 1. Вычислить предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + 2n^2}{(n+1)^3 - n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)! + n!}{2n! + (n+2)!}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1}\right)$.

Решение. 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так как непосредственно вычисление приводит к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2n^3}{(n+1)^3-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+2n^3}{n^3+3n^2+3n+1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+2n+1}{n^3+2n^2+3n+1}.$$

Разделим далее числитель и знаменатель дроби на старшую степень, т. е. на n^3, и получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=2,$$

так как при $n\to\infty$ последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ стремятся к нулю.

Таким образом, приходим к ответу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2n^3}{(n+1)^3-n^2}=2.$$

2) Так как по определению факториала

$(n-1)\ \ !=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1),$

$n\ \ !=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=(n-1)!n,$

$(n+2)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=$

$=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2),$

то получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+n!}{2n!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot(1+n)}{(n-1)!\cdot\left(2n+n(n+1)\cdot(n+2)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^3+3n^2+4n}.$$

Делением на старшую степень выражения, т. е. на n^3, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+n!}{2n!+(n+2)!}=0.$$

3) Поскольку при $n\to\infty$ имеем $\sqrt{\text{ï}^3+2}\to+\infty$ и $\sqrt{\text{ï}^3-1}\to+\infty$, то выражение $\sqrt{\text{ï}^3+2}-\sqrt{\text{ï}^3-1}$ дает неопределенность типа $\infty-\infty$. Умножив и разделив выражение $\sqrt{\text{ï}^3+2}-\sqrt{\text{ï}^3-1}$ на сопряженный множитель $\sqrt{\text{ï}^3+2}+\sqrt{\text{ï}^3-1}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}\cdot\left(\sqrt{\text{ï}^3+2}-\sqrt{\text{ï}^3-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\text{ï}^3+2}+\sqrt{\text{ï}^3-1}\right)}{\sqrt{\text{ï}^3+2}+\sqrt{\text{ï}^3-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}\left(n^3+2-n^3+1\right)}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}.$$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень, т. е. на $n^{\frac{3}{2}}$, тогда:

$$3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+8}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3-1}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}=3\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, получаем ответ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Пример 2. Пользуясь определением предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to3}(2x+4)=10.$

Решение. Пусть (x_n) – произвольная последовательность, которая сходится к 3 $(x_n\neq3,\ n\in\mathbf{N})$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3.$

Тогда $\lim\limits_{x\to3}(2x+4)=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+4)=2\lim\limits_{n\to\infty}x_n+4=2\cdot3+4=10.$

Пример 3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2+x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2+x-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-2)^4-(2x+1)^4}{-x^3-4x^2-2x+3}$.

Решение. 1) При подстановке в выражение, стоящее под знаком предела, значения $x=-1$ получаем

$$\lim_{x\to-1}\frac{3(-1)^2+2(-1)+1}{2+(-1)+(-1)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{3-2+1}{2-1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

2) При подстановке в выражение, стоящее под знаком предела, значения $x=-1$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1),$$
$$2+x-x^2=(x+1)(2-x).$$

Подставив полученные выражения, получим:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(2-x)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x-1}{2-x}=\frac{3(-1)-1}{2-(-1)}=-\frac{4}{3}.$$

3) Непосредственная подстановка значения $x=3$ приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, в числителе используем формулу бинома Ньютона, а многочлен в знаменателе разложим по схеме Горнера:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^4-4x^3 2+6x^2 2^3+2^4-((2x)^4+2)}{(-x-3)(x^2+x-1)}=\lim_{x\to-3}\frac{-15x^4-40x^3-40x+15}{(-x-3)(x^2+x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{-5(x^2+1)(x+3)(3x-1)}{-(x+3)(x^2+x-1)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+1)(3x-1)}{x^2+x-1}=\frac{10\cdot(9-1)}{9+3-1}=\frac{80}{11}.$$

Пример 4. Вычислить предел функции в точке:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

Решение. 1) При непосредственном использовании формул $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, где $C = const$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$; $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$. получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим дробь на общий множитель. Получим:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x-14}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot(x+7)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+7}{x-1}=\frac{2+7}{2-1}=9.$$

2) Непосредственное вычисление приводит к неопределенности типа $\infty-\infty$. Для раскрытия приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Далее разлагаем числитель и знаменатель на множители. Получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{-(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{3}{-3}=-1.$$

Литература: [7] р. 11 (11.1, 11.2); ***решение упражнений*** № 11.11 - 11.35, 12.12 -12.26;
[8] гл. 4 (§ 17, 18, 19, 20); ***решение упражнений*** № 4.33, 4.41, 4.48 (1, 2, 3), 4.49 (1, 2, 3, 4).

РАЗДЕЛ 5. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных

5.1. Приращение аргумента. Приращение функции. Понятие производной. Механический (физический) и геометрический смысл производной.
5.2. Основные правила дифференцирования. Таблица производных. Вычисление производных с использованием таблицы производных и правил дифференцирования.
5.3. Производная сложной функции. Нахождение производных сложных функций.
5.4. Производные высших порядков. Нахождение производных высших порядков. Дифференциалы высших порядков.
5.5. Монотонность и локальный экстремум функции.
5.6. Выпуклость, вогнутость, перегиб графика функции.

В результате изучения раздела «**Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных**» учащийся **должен:**
знать таблицу производных и уметь вычислять производные сложных функций.
знать понятия дифференциала первого порядка, производной n-го порядка, уметь вычислять производные n-го порядка.
уметь вычислять предел функции по правилу Лопиталя.
уметь исследовать функцию на монотонность и экстремум.
знать понятие частных производных первого порядка, полного дифференциала первого порядка, частных производных n-го порядка и уметь их вычислять.

Вопросы для самоконтроля:
1. Что называется производной функции в точке?
2. Какая функция называется дифференцируемой?
3. Чему равна производная постоянной?
4. Приведите таблицу формул дифференцирования.
5. Сформулируйте теоремы о производной суммы, разности, произведения и частного двух функций.
6. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
7. Сформулируйте правило Лопиталя – Бернулли.
8. Что называется частной производной функции нескольких переменных.

Примеры

Пример 1. Найти точки разрыва функции $y = f(x)$ и исследовать их характер. Построить схематически график функции в окрестности точек разрыва: $y = \dfrac{2}{x-4}$;

Решение. Функция $y = \dfrac{2}{x-4}$ определена на всей числовой прямой, кроме $x = 4$. Данная функция является элементарной, следовательно, она является непрерывной в каждой точке своей области определения. Поэтому единственной точкой разрыва является точка $x = 4$, в которой функция не определена. Для определения типа разрыва в этой точке вычислим односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{2}{x-4} = \left|\frac{2}{-0}\right| = -\infty; \qquad \lim_{x\to 4+0}\frac{2}{x-4} = \left|\frac{2}{+0}\right| = +\infty.$$

Приходим к выводу, что $x_0 = 4$ – точка разрыва II рода (бесконечного скачка).

Пример 2. Вычислить $y^{(4)}(x)$ для функции: 1) $y = (1-\ln x)x$; 2) $y = \dfrac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}$.

Решение. 1) Вычислим искомую производную последовательно, не применяя формулу Лейбница:

$$f^{(1)}(x) = \left((1-\ln x)x\right)' = -\frac{1}{x}\cdot x + (1-\ln x) = -1+1-\ln x = -\ln x;$$

$$f^{(2)}(x) = \left(-\ln x\right)' = -\frac{1}{x};$$

$$f^{(3)}(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2};$$

$$f^{(4)}(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}.$$

2) Искомую производную удобно найти, используя формулу Лейбница

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}&=C_n^0 f^{(n)}g^{(0)}+C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)}+C_n^2 f^{(n-2)}g^{(2)}+\ldots+\\&+C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}+\ldots+C_n^{n-1} f^{(1)}g^{(n-1)}+C_n^n f^{(0)}g^{(n)},\end{aligned}$$

. Для производной 4-го порядка формула Лейбница примет вид:

$$y^{(4)}(x)=f^{(4)}g^{(0)}+4f^{(3)}g^{(1)}+6f^{(2)}g^{(2)}+4f^{(1)}g^{(3)}+f^{(0)}g^{(4)}.$$

Функцию $y=\frac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}$ представим в виде $y=\ln(1+2x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$. Введем обозначения: $f(x)=\ln(1+2x)$, $g(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.

Для функции $f(x)$ найдем производные:

$$f^{(1)}(x)=\left(\ln(1+2x)\right)'=\frac{2}{1+2x};\ f^{(2)}(x)=\left(\frac{2}{1+2x}\right)'=-\frac{2\cdot 2}{(1+2x)^2}=-\frac{4}{(1+2x)^2};$$

$$f^{(3)}(x)=\left(-\frac{4}{(1+2x)^2}\right)'=\frac{16}{(1+2x)^3};\ f^{(4)}(x)=\left(\frac{16}{(1+2x)^3}\right)'=-\frac{96}{(1+2x)^4}.$$

Аналогично для функции $g(x)$ найдем производные:

$$g^{(1)}(x)=\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2};\ g^{(2)}(x)=\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)'=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4};$$

$$g^{(3)}(x)=\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\right)'=-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8};\ g^{(4)}(x)=\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8}\right)'=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{16}.$$

Полученные выражения подставим в формулу Лейбница:

$$\begin{aligned}y^{(4)}(x)&=-\frac{96}{(1+2x)^4}\cdot e^{-\frac{x}{2}}+4\cdot\frac{16}{(1+2x)^3}\cdot\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)+\\&+6\cdot\left(-\frac{4}{(1+2x)^2}\right)\cdot\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\right)+4\cdot\left(\frac{2}{1+2x}\right)\cdot\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8}\right)+\ln(1+2x)\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{16}.\end{aligned}$$

Упрощая это выражение, окончательно получим:

$$\left(\frac{\ln(1+2x)}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^{(4)}=e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{96}{(1+2x)^4}-\frac{32}{(1+2x)^3}-\frac{6}{(1+2x)^2}-\frac{1}{1+2x}+\frac{\ln(1+2x)}{16}\right).$$

Пример 3. Для функции $y=f(x)$ найти формулу производной n-го порядка, $n\in\mathbf{N}$, если:

1) $y=5^{2x+3}$; 2) $y=\ln(2x+1)$.

Решение. 1) Вычислим производную 1-го порядка:

$y'=\left(5^{2x+3}\right)'=2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+3}$. Далее

$$y''=\left(2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+3}\right)'=2\cdot\ln 5\cdot 2\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+3}=\left(2\cdot\ln 5\right)^2\cdot 5^{2x+3}.$$

$$y'''=\left((2\ln 5)^2\cdot 5^{2x+3}\right)'=(2\ln 5)^2\cdot 2\ln 5\cdot 5^{2x+3}=\left(2\ln 5\right)^3\cdot 5^{2x+3}.$$

Установив закономерность, запишем формулу для производной n-го порядка:

$$y^{(n)}=\left(5^{2x+3}\right)^{(n)}=\left(2\ln 5\right)^n\cdot 5^{2x+3}.$$

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции.

При $n=1$ имеем $y'=2\ln 5\cdot 5^{2x+3}$, что совпадает с найденной ранее производной y'. Предположим, что наша формула верна при $n=k$, т. е. $y^{(k)}=(2\ln 5)^k\cdot 5^{2x+3}$.

Докажем, что она верна и для $n=k+1$. Вычислим:

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left((2\ln 5)^k\cdot 5^{2x+3}\right)'=(2\ln 5)^k\cdot\left(5^{2x+3}\right)'=$$
$$=(2\ln 5)^k\cdot\ln 5\cdot 5^{2x+3}(2x+3)'=(2\ln 5)^k\cdot 2\ln 5\cdot 5^{2x+3}=(2\ln 5)^{k+1}\cdot 5^{2x+3}.$$

Получили, что равенство выполняется при $n=k+1$. По методу математической индукции формула будет верна для любого $n\in\mathbf{N}$.

2) Вычисляем последовательно:

$$y'=\frac{2}{2x+1};\ y''=-\frac{2\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2^2}{(2x+1)^2};\ y'''=\frac{2\cdot 2\cdot 2(2x+1)\cdot 2}{(2x+1)^4}=\frac{2^3\cdot 2}{(2x+1)^3};\ y^{(4)}=-\frac{2^3\cdot 2\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6}=-\frac{2^4\cdot 2\cdot 3}{(2x+1)^4}.$$

Приходим к заключению, что

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!}{(2x+1)^n}.$$

Справедливость этой формулы доказывается методом математической индукции.

Пример 4. Для функции, заданной уравнением $x^2y+x=5y$, найти производную второго порядка.

Решение. Функция задана в неявном виде. Дифференцируем обе части равенства $x^2y^2+x=5y$, рассматривая y как функцию переменной x:

$$\left(x^2\right)'y+x^2y'+x'=5y';$$

$$2xy+x^2y'+1=5y'. \qquad (1)$$

Выражая y' из равенства (1), получим:

$$y'=\frac{2xy+1}{5-x^2}. \qquad (2)$$

Продолжаем дифференцировать по переменной x равенство (2):

$$2x'y+2xy'+(x^2)'y'+x^2(y')'=5(y')';$$

$$2y+2xy'+2xy'+x^2y''=5y''.$$

Из последнего равенства выражаем $y''=\dfrac{2y+4xy'}{5-x^2}$.

Подставим в эту формулу найденное выражение (2) для y', получим: $y''=\dfrac{2y+4x\dfrac{2xy+1}{5-x^2}}{5-x^2}$.

После упрощения приходим к ответу: $y''=\dfrac{10y+4x+6x^2y}{\left(5-x^2\right)^2}$.

Литература: [10] гл. 6 (§ 2, 3); ***решение упражнений*** № 11, 12, 13;
гл. 7 (§ 1, 2, 3); ***решение упражнений*** № 3, 4, 5;
гл. 9 (§ 1, 2, 3); ***решение упражнений*** № 1, 2, 3, 4, 5.

РАЗДЕЛ 6. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

6.1. Понятие первообразной, понятие неопределенного интеграла. Их свойства. Таблица неопределенных интегралов. Нахождение неопределенных интегралов с помощью свойств и таблицы неопределенных интегралов.

6.2. Методы интегрирования: метод замены переменной, метод внесения функции под знак интеграла, метод интегрирования по частям.

6.3. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Вычисление определенных интегралов с помощью таблицы интегралов, свойств интеграла, формулы Ньютона - Лейбница.

6.4. Применение методов интегрирования по частям, метода замены переменной, метода внесения функции под знак дифференциала для вычисления определенных интегралов.

В результате изучения раздела «**Неопределенный интеграл. Определенный интеграл**» учащийся **должен:**

знать понятия первообразной функции, неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла, таблицу неопределенных интегралов, основные методы нахождения неопределенных интегралов (замена переменной, внесение функции под знак интеграла, интегрирование по частям).

знать понятие определенного интеграла, его свойства, физический и геометрический смысл, формулу Ньютона-Лейбница.

уметь вычислять определенные интегралы методами замены переменной, внесения функции под знак дифференциала, интегрирования по частям.

уметь решать простейшие задачи с профессионально направленным содержанием.

Таблица основных интегралов:

$$\int 0 \cdot dx = C; \quad (1)$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad (2)$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C; \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0); \quad (4)$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad (5)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (6)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (7)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad \text{в частности,} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C; \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad \text{в частности,} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C; \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C; \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \quad (14)$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ a = const.$

2. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

3. $(\int f(x)dx)' = f(x).$

4. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

5. $\int dF(x) = F(x) + C.$

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0.$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая функция называется первообразной для функции *f (x), x* принадлежит отрезку *(a,b)*?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции *f (x)*?
3. Приведите таблицу основных интегралов.
4. Что называется определенным интегралом от функции *f (x)* на отрезке *(a,b)*?
5. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
6. В чем заключается метод замены переменной интегрирования в определенных и неопределенных интегралах?
7. Запишите формулу интегрирования по частям для определенных и неопределенных интегралов?

Примеры

Пример 1. Проверить, является ли функция $F(x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + 5$ первообразной для функции $f(x) = \sin 7x.$

Решение. Найдем производную функции *F*(*x*):

$\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + 5\right)' = -\frac{1}{7}\cdot(-\sin 7x)\cdot 7 = \sin 7x.$ Функция *F*(*x*) является первообразной функции *f*(*x*).

Пример 2. Используя шестое свойство неопределенного интеграла, найти:

1) $\int \sin(x-2)\,dx;$ 2) $\int e^{\frac{x}{2}}dx;$ 3) $\int \frac{dx}{2-5x};$

4) $\int (8x+1)^9\,dx;$ 5) $\int \frac{dx}{(3x-1)^2+25};$

Решение. 1) По формуле (6) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int \sin(x-2)\,dx = -\cos(x-2) + C.$$

2) По формуле (5) таблицы неопределенных интегралов имеем:

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

3) Используем формулу (4) таблицы неопределенных интегралов. Тогда

$$\int \frac{dx}{2-5x} = -\frac{1}{5}\ln|2-5x| + C.$$

4) По формуле (2) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int (8x+1)^9\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{(8x+1)^{10}}{10} + C = \frac{(8x+1)^{10}}{80} + C.$$

5) По формуле (14) таблицы неопределенных интегралов имеем:

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2+25} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{5} + C = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{5} + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл:

1) $\int\sqrt{1-3x}dx$; 2) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

Решение. 1) *1-й способ*. Используем метод замены переменной. Положим $1-3x=t$.

Тогда $x=\frac{1}{3}(1-t)$, $dx=-\frac{1}{3}dt$. Имеем: $\int\sqrt{1-3x}dx=\int\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{t^3}+C=$

$=-\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3}+C.$

Для вычисления интеграла использовали формулу (2) таблицы неопределенных интегралов.

2-й способ. Используем метод поднесения под знак дифференциала. Представим данный интеграл в следующем виде:

$\int\sqrt{1-3x}dx=-\frac{1}{3}\int\sqrt{1-3x}\cdot(-3)dx.$

Учитывая, что $-3dx=d(1-3x)$, по формуле (2) таблицы неопределенных интегралов получаем:

$$\int\sqrt{1-3x}d(1-3x)=-\frac{1}{3}\int(1-3x)^{\frac{1}{2}}d(1-3x)=-\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3}+C.$$

2) Поскольку $d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, то $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Поднесение под дифференциал приводит далее к интегралу $2\int\sin\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right)=-2\cos\sqrt{x}+C.$

Для вычисления интеграла использовали формулу (6) таблицы неопределенных интегралов.

Пример 4. Методом подстановки найти интеграл:

1) $\int\sqrt{4-x^2}dx$; 2) $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^6}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1) Используем метод подстановки. Положим $x=2\sin t$, тогда $dx=2\cos tdt$.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot2\cos tdt=2\int\sqrt{4-4\sin^2t}\cos tdt=$$

$$=2\int\sqrt{4\left(1-\sin^2t\right)}\cos tdt=4\int\sqrt{\cos^2t}\cos tdt=4\int\cos^2tdt=4\int\frac{1+\cos2t}{2}dt=$$

$$=2\int(1+\cos2t)dt=2\int dt+2\int\cos2tdt=2t+\int\cos2td(2t)=$$

$$=2t+\sin2t+C=2t+2\sin t\cos t+C.$$

Для вычисления последних интегралов использовали формулы (3) и (7) таблицы интегралов. Выразим переменную t через переменную x.

$\sin t=\frac{x}{2}$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Тогда $\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$,

$$\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

Получаем ответ: $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$

2) Применим подстановку $x=t-2$, тогда $dx=dt$, $t=x+2$. Таким образом,

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)^6}=\int\frac{(t-2)^2}{t^6}dt=\int\frac{t^2-4t+4}{t^6}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{4}{t^5}+\frac{4}{t^6}\right)dt=$$

$$=\int\left(t^{-4}-4t^{-5}+4t^{-6}\right)dt=\frac{t^{-3}}{-3}-\frac{4t^{-4}}{-4}+\frac{4t^{-5}}{-5}+C=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t^4}-\frac{4}{5t^5}+C=-\frac{1}{3(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^4}-\frac{4}{5(x+2)^5}+C.$$

Для вычисления интеграла использовали формулу (2) таблицы интегралов.

3) Применим подстановку $x=\mathrm{tg}t$, тогда $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{\mathrm{tg}^2t\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}\frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Используя тригонометрическое тождество $1+\mathrm{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$, имеем:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}=\int\frac{dt}{\sin^2 t\cdot\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=$$

$$=\int(\sin t)^{-2}d\sin t=\frac{(\sin t)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{\sin t}+C.$$

Вернемся к переменной *x*, для чего выразим *t* через *x* из подстановки $x=\mathrm{tg}\,t$: $t=\mathrm{arctg}\,x$. Тогда

$\sin t=\sin\mathrm{arctg}\,x=\frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\mathrm{arctg}\,x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Таким образом, $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

Пример 5. Методом интегрирования по частям найти неопределенный интеграл:

1) $\int(5x+1)e^{x-1}dx$; 2) $\int\ln x dx$;

Решение. 1) Положим $u=5x+1$, $dv=e^{x-1}dx$. Тогда $du=5dx$, $v=e^{x-1}$. Используя формулу $\int udv=uv-\int vdu$. интегрирования по частям, получаем:

$$\int(5x+1)e^{x-1}dx=(5x+1)e^{x-1}-\int e^{x-1}\cdot 5dx=(5x+1)e^{x-1}-5\int e^{x-1}d(x-1)=$$

$$=(5x+1)e^{x-1}-5e^{x-1}+C=(5x+1-5)e^{x-1}+C=(5x-4)e^{x-1}+C.$$

2) Применим формулу $\int udv=uv-\int vdu$. интегрирования по частям:

$$\int\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x, & dv=dx,\\ du=\frac{dx}{x}, & v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Определенный интеграл и его свойства.

Пусть на отрезке [a; b], $a<b$ определена непрерывная ограниченная функция f (x). Произвольным образом разобьем отрезок [a; b] на n отрезков точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n=b\ \ (x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$. Полученные отрезки $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, … $[x_{n-1},\ x_n]$ будем называть частичными. Длину k-го частичного отрезка $[x_{k-1};\ x_k]$, $k=\overline{1,n}$, обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку c_k, $c_k\in[x_{k-1};\ x_k]$ (рис.4) и вычислим значение функции в этой точ- $f(c_k)$. ке, т. е.

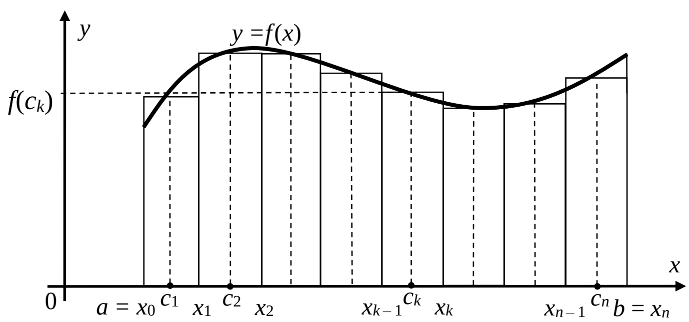

Рис. 4

Для каждого $k=\overline{1,n}$, k, найдем произведение $f(c_k)\Delta x_k$ и составим сумму:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции f (x) на отрезке [a; b].

Обозначим через $\Delta = \max \Delta x_k$, $k=\overline{1,n}$, длину наибольшего частичного отрезка.

Будем рассматривать всевозможные разбиения отрезка [a; b] при условии, что $n \to \infty$ и $\Delta \to 0$.

Определение. Если существует предел интегральной суммы при $\Delta \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки, ни от выбора точек c_k на каждом частичном отрезке, то этот предел называется определенным интегралом функции f (x) на отрезке [a; b] и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx. \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

Таким образом, числа a и b в формуле (1) называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Функция f (x) называется подынтегральной функцией, f (x)dx – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, отрезок [a; b] – отрезком интегрирования.

Функция f (x), для которой существует интеграл (1), называется интегрируемой на отрезке.

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b dx = b - a;$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \ c = const;$$

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt;$$

$$\int_a^{\alpha} f(x)dx = 0;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

Пример 1. Вычислить интеграл:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx;$ 2) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2};$

Решение. 1) Применим формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2) Подынтегральная функция $\frac{1}{4+x^2}$ является четной. Поэтому

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2} = 2\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-3)\cos\frac{2x-1}{3}dx;$ 2) $\int_0^1 \arccos x\, dx;$

Решение. 1) По формуле $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$ имеем:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-3)\cos\frac{2x-1}{3}dx = \left| \begin{array}{l} u = x-3,\ du = dx, \\ dv = \cos\frac{2x-1}{3}dx, \\ v = \frac{3}{2}\sin\frac{2x-1}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}(x-3)\sin\frac{2x-1}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sin\frac{2x-1}{3}dx = \frac{3}{2}\left(-\sin 1 + 2\frac{1}{2}\sin 0\right) +$$

$$+\frac{9}{4}\cos\frac{2x-1}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{3}{2}\sin 1 + \frac{9}{4}(\cos 1 - \cos 0) = -\frac{3}{2}\sin 1 + \frac{9}{4}\cos 1 - \frac{9}{4}.$$

2) Используем формулу $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$

$$\int_0^1 \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x,\ du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = x\arccos x\Big|_0^1 +$$

$$+\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = -\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1.$$

Литература: [1] гл. 12 (12.1 – 12.7);
[7] гл. 15 (15.1 – 15.4); ***решение упражнений*** № 15.1 -15.29, 15.32 – 15.41, 15.44 – 15.49, 15.65, 15.68, 15.69, 15.70, 15.72, 15.73, 15.74, 15.79, 15.81, 15.83, 15.110 – 15.120;
[5] гл. 8 (§ 45, 46); ***решение упражнений*** № 8.1 – 8.12, 8.13 – 8.32;
[5] гл. 9 (§ 48, 49, 50); ***решение упражнений*** № 9.15- 9.30;
[8] гл. 8 (§ 41, 42); ***решение упражнений*** № 8.1(1, 2, 3), 8.5, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11, 8.12, 8.14;
[8] гл. 9 (§ 44, 45); ***решение упражнений*** № 9.6 – 9,10.

РАЗДЕЛ 7. Дифференциальные уравнения

7.1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка: понятие, решение, задача Коши. Дифференциальное уравнение с разделяющими переменными.

7.2. Однородное дифференциальное уравнение.

В результате изучения раздела «**Дифференциальные уравнения»** учащийся **должен:** *знать* понятия дифференциального уравнения 1-го порядка, задачи Коши, общего и частного решений дифференциального уравнения а разделяющими переменными, однородного дифференциального уравнения и *уметь* их решать.

Вопросы для самоконтроля:
1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением 1-го порядка?
3. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением 2-го порядка?
4. Каков общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка?
5. Какое дифференциальное уравнение называется линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка?
6. Какой вид имеет линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка?
7. Когда линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка называется неоднородным?

__Примеры__

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\sqrt{x^2+4}y'=x;$ 2) $ydx+(1+x^2)dy=0;$

Решение. 1) Используем то, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$, и запишем исходное дифференциальное уравнение в виде

$\sqrt{x^2+4}\dfrac{dy}{dx}=x$ или $\sqrt{x^2+4}dy=xdx.$

Так как $\sqrt{x^2+4}\neq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то преобразуем уравнение к виду $dy=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Интегрируем последнее равенство: $\int dy=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. Получаем $y=\sqrt{x^2+4}+C$ – общее решение заданного дифференциального уравнения.

2) Предполагаем, что $y\neq 0$, а так как $1+x^2\neq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то преобразуем заданное дифференциальное уравнение к виду $-\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{y}$. Интегрируем последнее равенство: $-\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\int\dfrac{dy}{y}$.

Получаем: $-\operatorname{arctg}x=\ln|y|+\ln C,\ \ C>0.$

Произвольную константу записали в форме ln*C* для удобства дальнейших преобразований:
$\ln C|y|=-\operatorname{arctg}x.\ \ C|y|=e^{-\operatorname{arctg}x}$, т. е. $y=Ce^{-\operatorname{arctg}x}$.
Заметим, что преобразования аналитических выражений производятся с точностью до константы *C*.
Таким образом, $y=Ce^{-\operatorname{arctg}x}$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.
Проверяем, является ли решением $y=0$. Подставляем в заданное дифференциальное уравнение и видим, что $y=0$ является решением дифференциального уравнения. Однако оно не является особым, так как получается из общего решения при $C=0$.
Приходим к ответу:
$y=Ce^{-\operatorname{arctg}x}$ – общее решение, *C* = *const*.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $2xdx-(1+x^2)dy=0,\ \ y(0)=0;$ 2) $\dfrac{y}{y'}=\ln y,\ \ y(2)=1;$

3) $y'=2e^x\sin x,\ \ y(0)=1.$

Решение. 1) Разделив уравнение на $1+x^2 \neq 0$, получим: $dy = \frac{2x}{1+x^2}dx.$

Интегрируем левую и правую части: $y = \int \frac{2x}{1+x^2}dx;\ \ y = \ln(1+x^2)+\ln C.$

Получаем $y = \ln C(1+x^2)$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставляем начальное условие $y(0)=0$ и находим константу C:

$0 = \ln C$ или $C = 1.$ Нашли частное решение $y = \ln(1+x^2).$

2) Преобразуя заданное уравнение с учетом того, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получаем $dx = \frac{\ln y}{y}dy.$

Далее интегрируем: $\int dx = \int \frac{\ln y}{y}dy$ или $x = \frac{\ln^2 y}{2} + C$ – это общий интеграл исходного уравнения.

Используем начальное условие: в полученное решение подставляем $x = 2$ и $y = 1$. Находим константу C:

$2 = \frac{\ln^2 1}{2} + C,$ т. е. $C = 2.$ Значит, $x = \frac{\ln^2 y}{2} + 2,$ откуда получаем:

$2(x-2) = \ln^2 y$ – искомое частное решение (частный интеграл).

3) С учетом равенства $y' = \frac{dy}{dx}$ получаем $dy = 2e^x \sin x dx.$ Интегрируем: $\int dy = 2\int e^x \sin x dx$ или $y = 2\int e^x \sin x dx + C.$ Вычисляем последний интеграл, дважды интегрируя по частям:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Отсюда получаем $2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x).$

Таким образом, $y = e^x(\sin x - \cos x) + C$ – общее решение исходного дифференциального уравнения. Подставляя в него $x = 0,\ \ y = 1,$ находим C: $1 = e^0(\sin 0 - \cos 0) + C,$ т. е. $C = 2.$

Частным решением является $y = e^x(\sin x - \cos x) + 2.$

Литература: [1] гл. 13 (13.1, 13.2, 13.3);
[7] гл. 16 (16.1, 16.2, 16.3); ***решение упражнений*** № 16.11, 16.12 – 16.16, 16.18, 16.21, 16.22,16.23,16.33, 16.34, 16.35 – 16.40;
[5] гл. 10 (§ 57, 58, 59, 60, 61); ***решение упражнений*** № 10.5 (1,2,3,4), 10.7 – 10.13, 10.40 – 10.43;
[9] гл. 2 (§ 4, 5, 6, 7); ***решение упражнений*** № 2.13 (1,2,3), 2.14 (1,2,3,4,5);
[10] гл. 15 (§1, 2, 3, 4); ***решение упражнений*** № 1 -10, 32, 33, 39, 45, 46, 47.

РАЗДЕЛ 8. Ряды

8.1. Понятие числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
8.2. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши.
8.3. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных числовых рядов. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
8.4. Понятие функционального ряда, область сходимости и сумма функционального ряда. Понятие степенного ряда. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

В результате изучения раздела «**Числовые и функциональные ряды**» учащийся **должен:**
знать понятия числового ряда, *n*-го члена ряда, знакоположительного и знакопеременного числовых рядов, сходящегося и расходящегося рядов.

знать необходимое условие сходимости ряда, достаточные условия сходимости знакоположительных рядов: признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши.
уметь исследовать на сходимость знакоположительные числовые ряды.
знать понятия абсолютной и условной сходимости знакопеременных радов, *уметь* исследовать их на абсолютную и условную сходимость.
знать понятия функционального ряда, его области сходимости, радиуса сходимости, интервала и области сходимости, а также свойства степенного ряда.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определение числового ряда.
2. Что называется членом ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся?
4. Какой ряд называется расходящимся?
5. Что называется суммой ряда?
6. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда. Является ли это условие достаточным для сходимости ряда?
7. Сформулируйте признак сходимости ряда с неотрицательными членами.
8. В чем состоит признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами?
9. Сформулируйте признак Даламбера.
10. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
11. При каком условии числовой ряд сходится абсолютно?
12. Сформулируйте признак Лейбница.
13. Какой ряд называется условно сходящимся?

Примеры

Пример 1. Исследовать по признакам сравнения сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{(9n+1)11^n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^4-n+5}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n+n}$.

Решение. 1) Сравним заданный ряд со сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{11^n}$, где $q=\frac{1}{11}<1$. Замечаем, что каждый член $a_n=\frac{7n}{(9n+1)11^n}$ данного ряда меньше соответствующего члена $b_n=\frac{1}{11^n}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому, согласно признаку сравнения, заданный ряд сходится.

2) Сравним заданный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, где $p=1$. Замечаем, что каждый член $a_n=\frac{1}{\ln n}$ заданного ряда больше соответствующего члена $b_n=\frac{1}{n}$ расходящегося гармонического ряда. Поэтому, согласно признаку сравнения, заданный ряд расходится.

3) Сравнив заданный ряд со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, где $p=2>1$, по предельному признаку сравнения, имеем:

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)/(3n^4-n+5)}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+1)}{3n^4-n+5}=\frac{1}{3}.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, заданный ряд сходится.

4) Воспользуемся предельным признаком сравнения с гармоническим рядом:

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(\ln n+n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\ln n}{n}+1}=1.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, заданный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать по признаку Д'Аламбера сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{7^{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{3^n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(2n+1)!}$.

Решение. Используем предельный признак Д'Аламбера. Заменяем в заданной формуле общего члена ряда $a_n = f(n)$ номер n на $n+1$ и получаем формулу следующего члена ряда $a_{n+1} = f(n+1)$. Затем находим предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n при неограниченном увеличении номера n:

1) $a_n = \dfrac{n^3}{7^{n+1}}$; $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{7^{n+2}}$;

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 7^{n+1}}{7^{n+2} n^3} = \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{7}(1+0)^3 = \frac{1}{7} < 1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд сходится.

2) Поскольку $a_n = \dfrac{(2n)!}{3^n(n+1)}$ и $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{3^{n+1}(n+2)}$, то

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!3^n(n+1)}{3^{n+1}(n+2)(2n)!} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)}{(n+2)} =$$

$$= +\infty > 1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд расходится.

3) По условию $a_n = \dfrac{2^n}{(2n+1)!}$ и $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}$. Поэтому

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\,2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

Согласно предельному признаку Д'Аламбера, заданный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость знакопеременного ряда (определить, является ли он абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{7n+11}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(3n)}{(2n+7)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)(2n-1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{5\pi n}{13}$.

Решение. 1) Чтобы установить, сходится ли заданный ряд абсолютно, исследуем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{7n+11}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда. Воспользуемся предельным признаком сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$:

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(7n+11)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+11} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7+\dfrac{11}{n}} = \frac{1}{7}.$$

Получен конечный, отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково. Поэтому, согласно предельному признаку сравнения, знакоположительный ряд из модулей расходится. Для исследования на условную сходимость используем признак Лейбница. Поскольку члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\dfrac{1}{18} > \dfrac{1}{25} > \dfrac{1}{32} > \ldots > \dfrac{1}{7n+11} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{7n+11} = 0$, то, согласно признаку Лейбница, заданный ряд сходится. Следовательно, заданный ряд является условно сходящимся.

2) Исследуем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(3n)|}{(2n+7)!}$, составленный из абсолютных величин членов данного знакопеременного ряда. Поскольку $\frac{|\sin(3n)|}{(2n+7)!}\le\frac{1}{(2n+7)!}$, то воспользуемся признаком сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)!}$, который, согласно предельному признаку Д'Аламбера, сходится. Действительно:

$b_n=\frac{1}{(2n+7)!}$, $b_{n+1}=\frac{1}{(2n+9)!}$,

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+9)!}{1/(2n+7)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+8)(2n+9)}=0<1.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, полученный знакоположительный ряд также сходится, а значит, заданный ряд является абсолютно сходящимся.

3) Чтобы установить, сходится ли заданный ряд абсолютно, исследуем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n-1)}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда. Используем интегральный критерий:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(2x+2)(2x-1)}dx=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b\frac{d(2x-1)}{2x-1}-\int_1^b\frac{d(2x+2)}{2x+2}\right)=\frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}(\ln(2x-1)-\ln(2x+2))\Big|_1^b=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{2x-1}{2x+2}\Big|_1^b=\frac{1}{6}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{2b-1}{2b+2}-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}(\ln 1+2\ln 2)=\frac{1}{3}\ln 2.$$

Следовательно, заданный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся.

4) Для заданного знакопеременного ряда не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{5\pi n}{13}$ – не существует ($\cos\frac{5\pi n}{13}$ «колеблется» между –1 и 1, не стремясь ни к какому определенному числу). Следовательно, заданный знакопеременный ряд расходится.

Литература: [1] гл. 14 (14.1, 14.2, 14.3);
[5] гл. 12 (§ 77, 78, 79); ***решение упражнений*** № 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6;
[5] гл. 13 (§ 80, 81); ***решение упражнений*** № 13.2 (1,2), 13.3(1,2,3,4);
[7] гл. 17 (17.1, 17.2, 17.3, 17.4); ***решение упражнений*** № 17.1 – 17.6, 17.13 – 17.16, 17.20 – 17.24, 17.29 – 17.31, 17.33 – 17.38, 17.50 – 17.52, 17.72, 17.73;
[8] гл. 5 (§ 17, 18); ***решение упражнений*** № 5.1, 5.2, 5.3.

Методические рекомендации и варианты домашней контрольной работы

Требования по выполнению домашней контрольной работы

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами синего цвета, оставляя поля для замечаний преподавателя.
2. На лицевую сторону работы наклеивается бланк установленного образца, на котором должны быть четко указаны:
   - наименование учреждения образования;
   - полное наименование предмета (записывается с прописной буквы);
   - номер контрольной работы и номер выполняемого варианта;
   - фамилия, имя, отчество учащегося в родительном падеже;
   - личный шифр учащегося;
   - номер группы, специальность;
   - домашний адрес учащегося.
3. Решение задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в задании, сохраняя номер задач.
4. Решение задач излагать подробно, аккуратно, с соответствующими пояснениями.
5. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по положенному варианту. Контрольная работа, содержащая не все задачи, а также задачи не своего варианта, не засчитываются.
6. В конце работы следует указать использованную литературу (не менее 3-х источников).
7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все ошибки и недочеты.

Контрольная работа имеет 100 вариантов**. Вариант выбирается двум последним цифрам шифра (номер по списку в журнале).**

Например, учащиеся, имеющие шифры 23, 117, 6300, 3207 получают варианты 23, 17, 00, 07. Учащиеся, у которых шифры от 1 до 9 должны добавить цифру «0», т.е. 01, 02, 03, …, 09.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач	Вариант	Номера задач
00	8, 27, 53, 87, 105, 131	50	17, 38, 70, 80, 119, 142
01	2, 28, 54, 73, 104, 130	51	1, 29, 54, 79, 109, 129
02	22, 26, 51, 76, 101, 126	52	20, 35, 58, 83, 109, 150
03	14, 30, 56, 80, 106, 127	53	9, 34, 69, 95, 117, 149
04	11, 32, 55, 81, 102, 128	54	12, 33, 59, 87, 115, 145
05	9, 30, 57, 83, 124, 149	55	19, 32, 53, 76, 108, 134
06	7, 33, 73, 84, 103, 129	56	10, 35, 64, 89, 118, 141
07	1, 31, 52, 77, 107, 132	57	11, 37, 52, 84, 110, 137
08	5, 31, 65, 85, 108, 148	58	15, 47, 56, 78, 114, 133
09	23, 48, 61, 98, 123, 133	59	14, 43, 51, 77, 103, 148
10	25, 35, 74, 99, 122, 145	60	25, 30, 65, 91, 102, 139
11	6,35, 65, 89, 117, 141	61	18, 49, 59, 97, 101, 144
12	10, 48, 67, 97, 121, 145	62	5, 28, 74, 95, 116, 147
13	12, 28, 53, 78, 103, 128	63	21, 50, 63, 99, 112, 135
14	24, 29, 54, 80, 106, 132	64	25, 44, 55, 86, 111, 132
15	13, 34, 57, 82, 107, 133	65	17, 40, 62, 90, 106, 138
16	13, 38, 63, 88, 113, 128	66	16, 42, 67, 100, 113, 136
17	23, 37, 64, 87, 114, 127	67	23, 48, 72, 94, 121, 146
18	4, 48, 65, 89, 115, 146	68	3, 46, 66, 81, 105, 128
19	22, 47, 66, 91, 116,147	69	6, 44, 60, 92, 120, 143
20	2, 43, 58, 93, 118, 134	70	13, 36, 57, 69, 124, 140
21	15, 46, 57, 94, 117, 144	71	22, 31, 73, 98, 123, 126
22	3, 41, 69, 92, 119, 140	72	20, 27, 75, 87, 125, 131
23	19, 45, 84, 95, 120, 141	73	24, 41, 68, 86, 122, 127
24	18, 40, 71, 96, 121 139	74	16, 26, 82, 96, 107, 130
25	7, 22, 57, 100, 119, 150	75	4, 43, 55, 84, 118, 134
26	12, 47, 55, 89, 104, 144	76	2, 47, 52, 89, 108, 145
27	3, 33, 68, 76, 118, 149	77	15, 37, 64, 85, 115, 149
28	24, 34, 54, 86, 120, 144	78	1, 35, 53, 88, 117, 150
29	2, 30, 52, 90, 105, 130	79	19, 32, 59, 93, 109, 129
30	21, 41, 61, 95, 101, 141	80	10, 33, 69, 88, 104, 142
31	11, 31, 51, 85, 115, 145	81	7, 29, 58, 77, 115, 141
32	17, 37, 68, 94, 109, 139	82	4, 34, 68, 84, 114, 148
33	5, 45, 61, 93, 125, 140	83	11, 44, 57, 93, 122, 130
34	23, 43, 73, 100, 108, 138	84	6, 36, 75, 86, 107, 127
35	12, 32, 62, 78, 103, 133	85	23, 46, 65, 96, 124, 140
36	8, 45 , 58, 90, 113, 134	86	18, 38, 68, 79, 125, 150
37	10, 28, 53, 76, 102, 128	87	24, 29, 75, 79, 109, 140
38	16, 46, 66, 89, 103, 129	88	21, 28, 62, 97, 103, 143
39	16, 26, 56, 82, 107, 135	89	18, 30, 51, 78, 110, 141
40	17, 35, 59, 90, 110, 143	90	3, 45, 57, 81, 113, 132
41	14, 44, 69, 92, 106, 126	91	5, 30, 74, 91, 101, 135
42	22, 42, 74, 87, 112, 127	92	18, 40, 67, 94, 120, 140
43	4, 38, 70, 93, 111, 132	93	9, 33, 53, 84, 124, 131
44	18, 47, 63, 87, 106, 141	94	12, 28, 70, 82, 125, 150
45	20, 48, 67, 86, 117, 137	95	11, 26, 51, 76, 101, 126
46	5, 40, 60, 98, 116, 136	96	15, 45, 55, 80, 105, 130
47	19, 29, 75, 77, 121, 146	97	5, 50, 54, 79, 104, 129
48	9, 50, 71, 99, 108, 147	98	18, 33, 58, 83, 113, 143
49	24, 36, 72, 83, 124, 142	99	25, 29, 75, 100, 125, 150

Задания домашней контрольной работы

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=-4, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=22, \\ x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-2, \\ 5x_1-x_2-x_3=10, \\ x_1-x_2+5x_3=-12. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+2x_2+3x_3=10, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=36, \\ 2x_1-3x_3=-17, \\ 6x_2-5x_3=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2, \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6, \\ x_1-2x_2+x_3=9, \\ x_1-4x_2-2x_3=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=17, \\ x_1-x_2+x_3=13, \\ -x_1+x_2+x_3=7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6, \\ 2x_1-x_2+3x_3=11, \\ 4x_1+x_2-5x_3=9. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x_1+3x_2+2x_3=21, \\ 7x_1-4x_2+x_3=12, \\ 2x_1-3x_2-x_3=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=7, \\ 4x_1+5x_2-4x_3=3, \\ 3x_1-3x_2+2x_3=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2, \\ x_1-x_2+2x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-x_3=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ 4x_1+x_2+4x_3=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3=2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2, \\ 5x_1-2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_2-3x_3=31, \\ x_1-4x_2-6x_3=-16. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 57. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 23. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 14, \\ 7x_2 + 5x_3 = 29. \end{cases}$

Найдите указанные пределы, не используя правило Лопиталя:

26. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 4x - 12}$, если а) C=1; б) C=2; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 9x}{\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{6x}$.

27. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x^2 - x - 12}$, если а) C=1; б) C=4; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg\, 3x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}$.

28. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}$, если а) C=1; б) C=-5; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} ctg\, 7x \cdot \sin 5x$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5x)^{\frac{8}{x}}$.

29. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{x^2 - x - 12}{2x^2 - 7x - 4}$, если а) C=1; б) C=4; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin 6x \cdot ctg\, 4x$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^{9x}$.

30. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{3x^2 + 14x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$, если а) C=2; б) C=-5; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 2x}{\sin 12x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{n + 2}{n}\right)^{6n}$.

31. 1) $\lim\limits_{x \to C} \dfrac{x^2 - 1}{3x^2 + 4x + 1}$, если а) C=2; б) C=-1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2 5x}{\sin^2 3x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{n + 2}{n}\right)^{3n+5}$.

32. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2-x-4}$, если а) C=0; б) C=-1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg12x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n}\right)^{3n+2}$.

33. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-4x+3}$, если а) C=2; б) C=3; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{5x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{2-4n}$.

34. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}$, если а) C=3; б) C=1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{\sin 21x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-9x)^{\frac{2}{x}}$.

35. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$, если а) C=5; б) C= -5; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{4x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{9}{x}}$.

36. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-9x-22}{x^2-121}$, если а) C=3; б) C=11; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x}$.

37. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{3x^2-4x-15}{2x^2-5x-3}$, если а) C=2; б) C=3; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{16x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x}\right)^{x}$.

38. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$, если а) C=3; б) C=2; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{x}$.

39. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$, если а) C=2; б) C=4; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{-2x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{4x}$.

40. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$, если а) C=3; б) C=7; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 4x \cdot tg 2x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+5x}{5x}\right)^{x-2}$.

41. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$, если а) C=2; б) C=-3; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{4x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{6x}$.

42. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$, если а) C=1; б) C=2; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$.

43. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{3x^2+5x-8}{4x^2+x-5}$, если а) C=4; б) C=1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{6x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^{x}$.

44. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, если а) C=1; б) C=2; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{3x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+1}\right)^{x-3}$.

45. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$, если а) C=2; б) C=4; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{\sin^2 9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{x}$.

46. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{4x^2+3x-27}{x^2-6x-27}$, если а) C=2; б) C=-3; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 28x}{7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x}$.

47. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2+5x-6}{3x^2+x-4}$, если а) C=2; б) C=1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{9x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{11}{12x}\right)^{x}$.

48. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}$, если а) C=2; б) C=1; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{2x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{-8x}$.

49. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{x^2-25}{x^2+2x-35}$, если а) C=6; б) C=5; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{11x}$.

50. 1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$, если а) C=1; б) C=2; в) C=∞;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{8x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{7x}\right)^{-9x}$.

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

51. а) $\int\dfrac{13e^x dx}{\left(e^x-7\right)^2}$; б) $\int\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$.

52. а) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; б) $\int\dfrac{\ln x}{x^3}dx$.

53. а) $\int\dfrac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

54. а) $\int ctgxdx$; б) $\int e^{2x}xdx$.

55. а) $\int\sin^4 x\cos xdx$; б) $\int x\ln(x-1)dx$.

56. а) $\int 15^{x^3}x^2dx$; б) $\int arctgxdx$.

57. а) $\int\dfrac{\cos xdx}{\sin^2 x}$; б) $\int\ln\left(1+x^2\right)dx$.

58. а) $\int x^2\sin x^3dx$; б) $\int x^2e^xdx$.

59. а) $\int x^2\sin\left(x^3+7\right)dx$; б) $\int x\cos xdx$.

60. а) $\int 4x^2\sqrt{1+x^3}dx$; б) $\int x^2\ln xdx$.

61. а) $\int 3^{2x^3}x^2dx$; б) $\int\ln xdx$.

62. а) $\int 5^{3x^2}xdx$; б) $\int xarctgxdx$.

63. а) $\int tgxdx$; б) $\int(x-4)\cos 3xdx$.

64. а) $\int\dfrac{dx}{\sin^2\dfrac{7x}{4}}$; б) $\int x^2\sin xdx$.

65. а) $\int\dfrac{6xdx}{\cos^2\left(3x^2-1\right)}$; б) $\int x^2e^{3x}dx$.

66. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-8x}}$; б) $\int xe^{x}dx$.

67. а) $\int \sin\frac{x}{4}dx$; б) $\int x^{4}\ln xdx$.

68. а) $\int \frac{dx}{\cos^{2}9x}$; б) $\int x\ln xdx$.

69. а) $\int (5+\sin x)^{2}\cos xdx$; б) $\int \arccos xdx$.

70. а) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$; б) $\int arcctgxdx$.

71. а) $\int e^{x}\sin e^{x}dx$; б) $\int \sqrt{x}\ln xdx$.

72. а) $\int e^{5x^{3}+1}x^{2}dx$; б) $\int x\sin xdx$.

73. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{6+\cos x}}$; б) $\int x\sin 2xdx$.

74. а) $\int \frac{xdx}{(8-x^{2})^{4}}$; б) $\int \arcsin xdx$.

75. а) $\int \frac{\cos xdx}{3\sin x+2}$; б) $\int \frac{xdx}{\cos^{2}x}$.

Вычислите определенные интегралы:

76. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{(2-\sin x)^{2}}$;

77. $\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^{2}-7}dx$;

78. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{(x^{2}+1)^{2}}$;

79. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sin^{3}x}$;

80. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+1)^{2}}}$;

81. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2}x\cos xdx$;

82. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}$;

83. $\int_{0}^{\pi} e^{\cos x}\sin xdx$;

84. $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^{2}+1}dx$;

85. $\int_{1}^{2} \frac{e^{x}dx}{e^{x}-1}$;

86. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{2}\frac{x}{2}}$;

87. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$;

88. $\int_{0}^{1} (3x-1)^{2}dx$;

89. $\int_{0}^{1} e^{2x}dx$;

90. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$;

91. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$;

92. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$;

93. $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

94. $\int\limits_{-5}^{9} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+144}}$;

95. $\int\limits_{-1}^{1} tgxdx$;

96. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}dx$;

97. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5x+1}}$;

98. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos^2 xdx$;

99. $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2-1\right)^3 xdx$;

100. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos xdx$.

Найдите общее решение дифференциального уравнения, а там, где заданы начальные условия, определите частное решение:

101. $(x+3)dy-(y+3)dx=0$;

102. $(xy^2+x)dx+(y+x^2y)dy=0$;

103. $y'=\frac{4}{x^2-4}$;

104. $\sqrt{y}dx+x^2dy=0$;

105. $(1-y)dx+(x+1)dy=0$;

106. $\cos^2 ydx-(x^2+1)dy=0$;

107. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$;

108. $e^x dx+e^y(1-e^x)dy=0$;

109. $xy'=tgy$;

110. $2xyy'=y^2-1$;

111. $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ y(0)=1$;

112. $y'tgx-y=1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

113. $2\sqrt{y}dx-dy=0;\ y(0)=1$;

114. $\left(1+y^3\right)y'=3x^2y;\ y(0)=2$;

115. $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

116. $y'e^x=x;\ y(0)=-1$;

117. $y'+y\sin 2x=0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

118. $(x^2 y - x^2)dy - xydx = 0;\ y(e) = 1;$

119. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0;\ y(0) = 1;$

120. $x^2 dy + (y - 1)dx = 0;\ y(1) = e + 1;$

121. $\sqrt{1 - x^2}\, ydy - \sqrt{1 - y^2}\, xdx = 0;\ y(1) = 1;$

122. $2(xy + y)dx - xdy = 0;\ y(1) = e^2;$

123. $\cos x \sin y \cdot y' - \cos y \sin x = 0;\ y(\pi) = \pi;$

124. $\sqrt{x^2 - 1}dy - xydy = 0;\ y(1) = 1;$

125. $2y' = \dfrac{y^3}{x^2};\ y(-1) = 1;$

Напишите в развернутом виде и исследуйте на сходимость ряд с положительными членами; б) исследуйте знакопеременный ряд на условную и абсолютную сходимость.

126. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5n - 1};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n - 2)!}.$

127. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + 1}{n^2 + 2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2n}{3n + 5}\right)^n.$

128. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 3};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n - 3)}{n^2 - 1}.$

129. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n - 2)^2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{(2n + 1)^n}.$

130. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 2n - 1}{n^3 + 3n + 2};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n}{100n + 1}.$

131. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[5]{n + 2}};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^n}{(2n)!}.$

132. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2 + 1};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \pi n}{n^2}.$

133. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n + 1)}{5n - 2}.$

134. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n};$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}.$

135. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

136. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2n}{50n+5}$.

137. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 5^n}$.

138. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(-1)^n}{n(n+2)}$.

139. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[4]{n+1}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.

140. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)(-1)^n}{n^2+3n}$.

141. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$.

142. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(n^2+2)\cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[5]{n^3+1}}$.

143. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$.

144. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}$.

145. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^n}$.

146. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\left(n^2+3\right)}{\sqrt{n^7+1}}$.

147. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

148. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$; б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

149. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

150. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt[3]{n^2+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

<u>Таблица формул и правил дифференцирования.</u>

Формулы дифференцирования

1. $C' = o$
2. $x' = 1$
3. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
5. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
7. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}, u > 0$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

15. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Правила дифференцирования

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(uv)' = u'v + uv'$

3. $(Cu)' = Cu'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

5. $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$
11. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} tgkx + C$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2 x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + C$
18. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
19. $\int \frac{dx}{k^2 + n^2 x^2} = \frac{1}{nk} arctg \frac{n}{k} x + C$
20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Образец выполнения контрольной работы

Задание 1.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$ (1)

Решение.

Прямой ход.

Первый шаг. За первое ведущее уравнение примем первое уравнение, а за первое ведущее неизвестное примем x_1. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму и третьему уравнениям ведущее, умноженное на -3. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 13x_2 + 7x_3 = 2, \\ 7x_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Второй шаг. За второе ведущее уравнение системы (2) примем второе уравнение, а за второе ведущее неизвестное –x_2. Исключим его из третьего уравнения. В данном случае задача облегчается, т. к. $x_2=0$. Тогда из второго уравнения системы (2) имеем $7x_3=5$. Тогда получим треугольную систему:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 13x_2 - 7x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен.

Обратный ход.

В результате обратного хода получаем:

$$x_3 = \frac{5}{7}, x_2 = 0, x_1 = -1 + 2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{3}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{7}.$

Задание 2.

Найдите: . 1) $\lim\limits_{x \to C} \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 + x - 2}$**, если а) С=2; б) С=1; в) С=**∞**;**

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{tg 5x}$**;** **3)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{5n+2}$**.**

Решение.

1) Найти:1) $\lim\limits_{x \to C} \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 + x - 2}$**, если а) С=2; б) С=1; в) С=**∞**.**

а) Применяя теорему о пределе частного, получим:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 7x - 9}{x^2 + x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 + 7x - 9}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + x - 2} = \frac{2 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 9}{2^2 + 2 \cdot 2} = \frac{13}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$

Здесь предел знаменателя равен нулю, следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Предел знаменателя тоже равен нулю. Имеем неопределенность вида (0/0). Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+\frac{9}{2})}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+9}{x+2}=\frac{11}{3}.$$

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}$

Здесь числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, поэтому теорему о пределе частного применить нельзя. Разделим числитель и знаменатель на x^2. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-9}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{9}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1+0-0}=2.$$

2) Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$.

Решение.

Здесь мы имеем неопределенность вида (0/0). Преобразуем функцию $\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$ таким образом, чтобы использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 5x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}\cdot\cos 5x=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot 1=\frac{3}{5}.$$

3) Найти: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{5n+2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{5n+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1,\ \text{а}\ \lim_{x\to\infty}(5x+2)=\infty.$$

Преобразуем данное выражение так, чтобы использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x=e$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{5n+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{5n+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}\cdot(5n+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{10n+4}{n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{10+\frac{4}{n}}=e^{10}$,

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\left(10+\dfrac{4}{n}\right)=10.$.

Задание 3.

Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием:

а) $\int e^{2\cos x+3}\cdot \sin x dx$; **б)** $\int (x-2)e^{2x}dx$.

Решение.

а) $\int e^{2\cos x+3}\cdot \sin x dx$.

Положим $2\cos x+3=t,$ тогда $-2\sin x dx=dt,$ $\sin x dx=-\frac{1}{2}dt$, поэтому

$$\int e^{2\cos x+3}\cdot \sin x dx=-\frac{1}{2}\int e^{t}dt=-\frac{1}{2}e^{t}+C=-\frac{1}{2}e^{2\cos x+3}+C,$$

для проверки полученного результата убедимся, что производная от полученного выражения равна подынтегральной функции:

$$\left(-\frac{1}{2}e^{2\cos x+3}+C\right)'=-\frac{1}{2}e^{2\cos x+3}\cdot(2\cos x+3)'=-\frac{1}{2}e^{2\cos x+3}\cdot 2\cdot(-\sin x)=e^{2\cos x+3}\cdot \sin x.$$

В результате получим подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден верно.

б) $\int (x-2)e^{2x}dx$.

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям: $\int udv=uv-\int vdu.$

Пусть $x-2=u,$ $e^{2x}dx=dv,$ тогда $du=dx,$ $v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x},$

поэтому $\int (x-2)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x-2)e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int(x-2)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$

Проверка.

$\left(\frac{1}{2}(x-2)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\right)'=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}(x-2)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\cdot 2=(x-2)e^{2x},$ что подтверждает правильность полученного результата.

Задание 4.

Вычислить интеграл: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x dx.$

Решение.

1) Положим $\cos x=t,$ тогда: $-\sin x dx=dt,$ а $\sin x dx=-dt.$
2) Определим пределы интегрирования для переменной *t*: $t_1=\cos 0=1,$ $t_2=\cos\frac{\pi}{2}=0.$
3) Выразив подынтегральное выражение через t и dt, перейдем к новым пределам, получим:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x dx=-\int\limits_{1}^{0}t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{1}^{0}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{0}=-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_{1}^{0}=-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_{1}^{0}=-\frac{2}{3}(0-1)=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задание 5.

Найдите общее решение дифференциального уравнения, а там, где заданы начальные условия, определите частное решение.

$$y' = \frac{xy}{x^2+1}; \; y\left(2\sqrt{2}\right) = 3.$$

Решение.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}$, откуда $\left(x^2+1\right)dy = xydx.$

Разделим обе части уравнения на произведение $y\left(x^2+1\right)$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2+1},$$

интегрируя, получим: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{x^2+1},$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1},$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \ln|C_1|$$

после потенцирования, получим решение $|y| = |C_1|\sqrt{x^2+1}$, откуда:

$y = \pm C_1\sqrt{x^2+1}$ или $y = C\sqrt{x^2+1},$ где $C = \pm C_1.$

Итак, $y = C\sqrt{x^2+1}$ - общее решение.

Так как даны начальные условия, то будем искать частное решение.

Подставив в общее решение значение $y = 3$ и $x = 2\sqrt{2}$, получим $3 = C\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1}$; $3 = C\cdot 3$, откуда $C = 1$.

Частное решение уравнения, удовлетворяющее данному условию, имеет вид $y = \sqrt{x^2+1}.$

Задание 6.

6 а). Запишите в развернутом виде и исследуйте на сходимость ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

Решение.

Запишем в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Запишем n-й и $(n+1)$-й члены данного ряда: $a_n = \frac{2n-1}{2^n}; a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}.$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2^{n+1}} : \frac{2n-1}{2^n}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot(2n-1)}$$

Сократим дробь на 2^n:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n+1}{2\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2};$$

Так как $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$, получим $\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1$, следовательно, ряд <u>сходящийся.</u>

6 б). Запишите в развернутом виде и исследуйте знакопеременный ряд на условную и абсолютную сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3}$.

Решение.

Запишем в развернутом виде:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n^3}=-1+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+...$

Так как это знакочередующиеся ряды, то, применяя признак Лейбница, получим:

а) $|1|>\left|\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{3}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|>...$ и $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то ряд сходится. Однако ряд, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из модулей, расходится как гармонический и, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится условно.

б) Данный знакочередующийся ряд также сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из его модулей,

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

является обобщенным гармоническим рядом и при $\alpha>1$ сходится. Следовательно, этот ряд сходится абсолютно.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика. Общий курс / Под редакцией А.И.Яблонского. – Мн. Высшая школа, 1993
2. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистики. – Мн. Высшая школа, 1976
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – Мн. Наука, 1985
4. Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х томах. Мн. – 1983
5. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. – Изд. Наука, 1990
6. Богомолов Н.В. Практические задания по математике. – М. Высшая школа, 1990
7. Кузнецов А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике. – М.Высшая школа, 1994
8. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. / Под редакцией Г.Н. Яковлева, 1 часть. – М. Наука, 1987
9. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. / Под редакцией Г.Н. Яковлева, 2 часть. – М. Наука, 1987
10. Богомолов Н.В. Практические задания по математике. – М.Высшая школа, 1979